Univerzita Karlova v Praze
Filozofická fakulta

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

2009 Pavel Arazim

Univerzita Karlova v Praze

Filozofická fakulta
Katedra logiky

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

Pavel Arazim

Relace bisimulace

Bisimulation

2009 Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Marta Bílková Ph.D.

Rád bych na tomto místě poděkoval všem, kteří mi byli nápomocni při tvorbě této práce. Zvláště pak děkuji vedoucí práce, Martě Bílkové, za cenné rady a odborné vedení.

Prohlašuji, že jsem svou bakalářskou práci napsal samostatně a výhradně s použitím citovaných pramenů. Souhlasím se zapůjčováním práce.

V Praze dne 13. května 2009 Podpis

Obsah

Abstrakt **5**

1 Modální logika **5**
1.1 Rámce 5
1.2 Modely a sémantika 5
1.2.1 Splňování formulí 6
1.3 Standardní překlad 7
1.4 Definovatelnost vlastnotí relace dosažitelnosti na rámcích 9
1.5 Isomorfismus 12
1.6 Vázaný morfismus 13
1.7 Bisimulace 16
1.7.1 Několik příkladů bisimulace 19
1.7.2 Bisimulace a standardní překlad 20

2 Intuicionistická logika bez kontrakce **21**
2.1 Vlastnosti rámců 21
2.2 Modely a sémantika 23
2.2.1 Některé vlastnosti sémantiky 23
2.2.2 Bisimulace 25
2.2.3 Příklady bisimulace 26

Název práce: Relace bisimulace
Autor: Pavel Arazim
Katedra: Katedra logiky
Vedoucí bakalářské práce: Mgr. Marta Bílková Ph.D.
e-mail vedoucího: marta.bilkova@ff.cuni.cz
Tato práce se zabývá relací bisimulace v modální logice a také v intuicionistické logice bez kontrakce. Bisimulace je relace mezi sémantickými modely, která je slabší než isomorfismus, ale přitom pořád zaručuje ekvivalenci v dané logice. Jejím typickým použitím jsou důkazy nerozlišitelnosti určitých typů struktur jazykem dané logiky. Příkladem takové vlastnosti je kardinalita modálních modelů, jejíž nerozlišitelnost ukazuje konstrukce disjunktního sjednocení. Pro modální logiku má relace bisimulace velký význam ještě také proto, že objasňuje její vztah ke klasické prvořádové logice. Kromě bisimulace je zkoumán také související pojem vázaného morfismu, který umožňuje převést výsledky o nedefinovatelnosti i na úroveň rámců. Část o modální logice je především shrnutím obecně známých výsledků, přičemž se snaží objasnit jejich souvislosti, případně rozvést některé důkazy, které se obvykle přecházejí jako zřejmé. U méně prozkoumané intuicionistické logiky bez kontrace spočívá značná část práce už v samotné definici její sémantiky a zajištění její funkčnosti. Také zde je ovšem zavedena bisimulace i vázaný morfismus a na jejich konkrétních příkladech je naznačeno možné využití.
Klíčová slova: Bisimulace, vázaný morfismus, ekvivalence, překlad, kontrakce

Title: Bisimulation
Author: Pavel Arazim
Department: Department of logic
Supervisor: Mgr. Marta Bílková Ph.D.
Supervisor's e-mail address: marta.bilkova@ff.cuni.cz
Abstract: This work is about bisimulation in modal logic as well as in intuicionistic logic without contraction. Bisimulation is a relation between models, which is weaker than isomorphism, yet still guarantees equivalence in the in the selected logic. It is typically used to demonstrate that some properties of models cannot be distinguished. For instance the cardinality cannot be distinguished, which is shown by disjunct union. Bisimulation also helps to clarify the relation between modal and classical logic. Apart from bisimulation, the related notion of bounded morphism is studied because it enables to elevate the undefinability and undistinguishability to the discourse of frames. The part about modal logic is basically a compilation of well known facts, yet their interaction is made more clear and some proofs, which are usually disregarded as obvious, are presented in an explicit manner. Talking about the second part, mere reasonable definition of the semantics is an honest work. Yet even here the bisimulation and bounded isomorphism are introduced and some examples are shown in order to illustrate their utility.
Keywords: Bisimulation, bounded morphism, equivalence, translation, contraction

Kapitola 1

Modální logika

V této kapitole shrnu základní poznatky o bisimulaci v modální logice. Nejprve zavedu modální rámec a model, dále pojednám o standardním překladu do klasické provřádové logiky a o definovatelnosti vlastností modelů a rámců. Poté předvedu, co k těmto tématům může říci bisimulace, případně vázaný morfismus. Budu vycházet především z [1] a [2].

1.1 Rámce

Sémantika modální logiky je založena na konceptu rámce a dále na konceptu modelu, který je jeho rozšířením. Modální logiku lze studovat jak na úrovni modelů, tak o stupeň výše, na úrovni rámců. Rámec, značený obvykle písmenem $\mathbb{F}$ podle anglického slova frame, je definován jako uspořádaná dvojice

$$\mathbb{F} = (W, R),$$

kde W je množina možných světů a $R \subseteq W \times W$ je relace dosažitelnosti na možných světech. Po této relaci dopředu nepožadujeme vůbec nic, ale studium jejích vlastností bude důležitou částí této práce. Budeme se ptát, kdy je tato relace např. reflexivní, transitivní, symetrická atd. a budeme se ptát, nakolik lze tyto vlastnosti postihnout jazykem modální logiky, se kterým se seznámíme v následujících oddílech.

1.2 Modely a sémantika

Nyní si představíme model, jako konkretizaci rámce. Tím budeme moci také definovat splňování modálních formulí v možných světech. Model $\mathbb{M}$ je uspořádaná trojice

$$\mathbb{M} = (W, R, V),$$

kde W je množina možných světů a R je relace dosažitelnosti, jak jsme je zavedli už na rámcích a V je funkce valuace, která každé atomické formuli z množiny atomických formulí Pr přiřadí podmnožninu množiny možných světů W

$$V : Pr \longrightarrow P(W).$$

Pro danou atomickou formuli p říkáme, že ve světech z množiny $S \subseteq W$ takové, že $V(p) = S$, je splněna. Tím jsme začali definovat splňování formulí.

1.2.1 Splňování formulí

Splňování se dělí na lokální, kdy hovoříme o splněnosti formule v daném světě daného modelu, a globální, kdy hovoříme o splněnosti ve všech světech daného modelu. Nejprve se podívejme na lokální variantu, definice bude postupovat indukcí podle složitosti formule.

Definice 1.2.1. *Mějme dán model $\mathbb{M}$ a svět $w \in W$ z množiny možných světů W tohoto modelu. O formuli φ pak podle její složitosti řekneme že je ve světě w splněna a píšeme $\mathbb{M}, w \Vdash \varphi$ podle následujícíh podmínek:*

(i) pro atom($\varphi = p$): $\mathbb{M}, w \Vdash p \iff w \in V(p)$

(ii) pro negaci($\varphi = \neg\psi$): $\mathbb{M}, w \Vdash \neg\psi \iff \mathbb{M}, w \nVdash \psi$

(iii) pro konjunkci($\varphi = \psi \& \chi$): $\mathbb{M}, w \Vdash \psi \& \chi \iff \mathbb{M}, w \Vdash \psi$ *a zároveň* $\mathbb{M}, w \Vdash \chi$

(iv) pro disjunkci($\varphi = \psi \vee \chi$): $\mathbb{M}, w \Vdash \psi \vee \chi \iff \mathbb{M}, w \Vdash \psi$ *nebo* $\mathbb{M}, w \Vdash \chi$

(v) pro implikaci($\varphi = \psi \to$ chi): $\mathbb{M}, w \Vdash \psi \to \chi \iff \mathbb{M}, w \nVdash \psi$ *nebo* $\mathbb{M}, w \Vdash \chi$

(vi) pro modalitu nutnosti($\varphi = \Box\psi$): $\mathbb{M}, w \Vdash \Box\psi \iff \forall v \in W(wRv \Rightarrow \mathbb{M}, v \Vdash \psi)$

(vii) pro modalitu možnosti($\varphi = \Diamond\psi$): $\mathbb{M}, w \Vdash \Diamond\psi \iff \exists v \in W(wRv \;\&\; \mathbb{M}, v \Vdash \psi)$.

Formule $\perp$ není splněna nikdy, formule $\top$ je pak splněna vždy. Pokud jde o globální platnost, tak říkáme, že formule φ platí v modelu $\mathbb{M}$ a píšeme $\mathbb{M} \Vdash \varphi$, jestliže platí v každém možném světě tohoto modelu, tedy

$$\forall w \in W(\mathbb{M}, w \Vdash \varphi).$$

Je zřejmé, že globální platnost implikuje lokální platnost pro každý možný svět. O formuli, která není spněna v žádném světě žádného modelu, jako např. formule $\varphi \wedge \neg\varphi$ říkáme, že je nesplnitelná. V opačném případě říkáme, že je splnitelná, což platí např. o každé atomické formuli. Konečně o formuli, která platí v každém světě každého modelu, jako např. $\varphi \vee \neg\varphi$ říkáme, že je logicky platná.

Stojí za povšimnutí, že obě modality, které tato logika má navíc ve srovnání s klasickou výrokovou logiku, se nemusejí chovat vždy tak, jak bychom intuitivně čekali, pokud je vykládáme jako modality možnosti a nutnosti. Tak např. nemusí vždy být splněna možná konstanta true, tedy formule

$$\Diamond\top$$

není logicky platná. Na druhou stranu může být spor dokonce nutný, tedy formule

$$\Box\perp$$

je splnitelá. Navíc nutnost neimplikuje vždy možnost, takže nelze prohlásit za logicky platnou formuli:

$$\Box\varphi \to \Diamond\varphi$$

Ve všech třech zmíněných případech stačí uvažovat model s jediným možným světem a prázdnou relací dosažitelnosti, abychom se přesvědčili.

1.3 Standardní překlad

Nyní si ukážeme, že modální výrokovou logiku lze pojímat také jako fragment klasické predikátové logiky. K příslušným modálním modelům si najdeme odpovídající modely predikátové a ukážeme si, jak můžeme modální formule přeložit do prvořádového jazyka. Mějme dán modální model $\mathbb{M} = (W, R, V)$ a nechť jsou všechny atomické formule opatřeny indexem i z nějaké indexovací množiny I. Nyní uvažujme prvořádový model

$$\mathbb{W} = (W, R, P_i, P_j, P_k, ...),$$

kde nosič W je totožný s množinou možných světů uvažovaného modálního modelu a R je binární relace totožná s relací dosažitelnosti. Unární predikáty $P_i, P_j, P_k, ...$ pak svými indexy odpovídají atomickým formulím v modální logice a pro každý svět $w \in W$ čteme $w \in P_i$ tak, že ve světě w platí atom p_i. Nyní definujme standardní překlad modální formule φ do prvořádové formule s jazykem $\mathbb{L} = (R, P_i, P_j, P_k, ...)$. Tento překlad bude formule s jednou volnou proměnnou x a budeme jej značit $ST_x(\varphi)$, kde dolní index označuje onu volnou proměnnou a v závorce je uvedena původní modální formule. Překlad postupuje indukcí podle složitosti formule φ, a to následovně:

(i) pro $= p_i$, kde p_i je atom: $ST_x(p_i) \equiv_{def} P_i(x)$

(ii) pro $\varphi = \psi \wedge \chi$: $ST_x(\psi \wedge \chi) \equiv_{def} ST_x(\psi) \wedge ST_x(\chi)$

(iii) pro $\varphi = \psi \vee \chi$: $ST_x(\psi \vee \chi) \equiv_{def} ST_x(\psi) \vee ST_x(\chi)$

(iv) pro $\varphi = \psi \to \chi$: $ST_x(\psi \to \chi) \equiv_{def} ST_x(\psi) \to ST_x(\chi)$

(v) pro $\varphi = \Box\psi$: $ST_x(\Box\psi) \equiv_{def} \forall y(xRy \to ST_y(\psi))$

(vi) pro $\varphi = \Diamond\psi$:$ST_x(\Diamond\psi) \equiv_{def} \exists y(xRy \wedge ST_y(\psi))$

Nyní si ukážeme, že každá modální formule φ je se svým standardním překladem $ST_x(\varphi)$ ve správném smyslu ekvivalentní.

Věta 1.3.1. *Buď $\mathbb{M} = (W, R, V)$ libovolný modální model a $\mathbb{W}$ jeho modální ekvivalent. Pak pro každý možný svět $w \in W$, respektive $w \in \mathbb{W}$ a pro každou modální formuli φ platí:*

$$\mathbb{M}, w \Vdash \varphi \Longleftrightarrow \mathbb{W} \models ST_x(\varphi)[x/w],$$

kde x/w v hranaté závorce označuje ohodnocení, které za x dosadí svět w.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle složitosti modální forule φ.

(i) pro atom:$\mathbb{M}, w \Vdash p_i \iff w \in P_i \iff \mathbb{W} \models P_i(w)$

(ii) pro konjunkci:$\mathbb{M}, w \Vdash \psi \wedge \chi \iff \mathbb{M}, w \Vdash \psi$ a zároveň $\mathbb{M}, w \Vdash \chi \iff \mathbb{W} \models ST_x(\chi)[x/w]$ a zároveň $\mathbb{W}, \models ST_x(\psi)[x/w] \iff \mathbb{W}, \models (ST_x(\psi) \wedge ST_x(\chi))[x/w] \iff$- $\mathbb{W}, \models ST_x(\psi \wedge \chi)[x/w]$,

kde druhou ekvivalenci dostáváme z indukčního předpokladu, zatímco všechny ostatní máme z definic spojek. Pro diskujunkci a implikaci se tvrzení dokáže podobně.

(iii) pro negaci:$\mathbb{M}, w \Vdash \neg\psi \iff \mathbb{M}, w \nVdash \psi \iff \mathbb{W} \not\models ST_x(\psi) \iff \mathbb{W} \models ST_x(\neg\psi)$

(iv) pro nutnost:$\mathbb{M}, w \Vdash \Box\psi \iff \forall v \in W(wRv) \Rightarrow \mathbb{M}, v \Vdash \psi) \iff \forall v \in W(wRv \Rightarrow \mathbb{W}, \models ST_x(\psi)[x/v]) \iff \mathbb{W}, \models ST_x(\Box\psi)[x/w])$.

$\square$

Tím jsme si ukázali korespondeci mezi lokálním modálním splňováním a splňováním prvořádovým. Tento výsledek lze snadno rozšířit i na platnost globální.

Věta 1.3.2. *Buď $\mathbb{M}$ modální model, $\mathbb{W}$ k němu analogický model prvořádový a φ libovolná modální formule. Pak platí následující ekvivalence:*

$$\mathbb{M} \Vdash \varphi \iff \mathbb{W} \models \forall w(ST_x(\varphi)).$$

Důkaz. Důkaz je v tomto případě zřejmý. Stačí si uvědomit, že zápis $\mathbb{M} \Vdash \varphi$ znamená $\mathbb{M}, w \Vdash \varphi$ pro každé $w \in W$. Z předchozí věty víme, že potom

$$\mathbb{W} \models (ST_x(\varphi)[x/w].$$

a to pro každé $w \in W$, což odpovídá tarského definici obecného kvantifikátoru. $\square$

Existence standardního překladu má pro modální logiku důležité důsledky. Např. pro ni platí kompaktnost nebo Loewenheim-Skolemova věta. Např. kompaktnost říká, že když nějaká formule φ vyplývá z množiny Γ, pak vyplývá už z nějaké konečné $\Delta \subseteq \Gamma$. Všechny modální formule stačí přeložit do provořádového jazyka tak, jak jsme si ukázali, a můžeme použít kompaktnost pro klasickou predikátovou logiku. Přirozeně vyvstává otázka, jaký je vztah modálních formulí a provořádových formulí v jazyce $L = \{R, P_i, P_j, P_k\}$. Ukázalo se, že každá modální formule je v určitém smyslu ekvivalentní s některou z prvořádových formulí v jazyce L, a sice se svým překladem. Zjevně ale existují i prvořádové formule, které nejsou překladem, např. xRy. V pozdějších kapitolách si ukážeme, že pomocí relace bisimulace na modálních modelech lze vymezit přesně ty prvořádové formule, které jsou ekvivalentí překladu některé modální formule. Předtím chci ale ještě ukázat motivaci pro pojem bisimulace.

1.4 Definovatelnost vlastnotí relace dosažitelnosti na rámcích

Relace dosažitelnosti R hraje v modální logice důležitou roli, její konkrétní podoba ovlivňuje platnost modálních formulí, ale přesto o ní nelze v jazyce modální logiky, narozdíl od logiky prvořádové, mluvit přímo. Navzdory tomu ale o ní dokáže modální jazyk leccos říci, tedy je možné usuzovat z platnosti některých modálních formulí na některé vlastnoti této relace. Nakolik může být modální logika v tomto ohledu expresivní a jaké jsou tady její meze je vlastně hlavní téma mé práce. Nejprve se podíváme na to, co modální logika vyjádřit dokáže. Začneme definicí splňování v rámci.

Definice 1.4.1. *Buď $\mathbb{F} = (W, R)$ modální rámec a φ modální formule. Pak prohlásíme, že φ je splněna v rámci $\mathbb{F}$ a píšeme*

$$\mathbb{F} \Vdash \varphi,$$

jestliže pro každý model $\mathbb{M}$, který vznikl z tohoto rámce, takže má jeho množinu možných světů a relaci dosažitelnosti, platí $\mathbb{M} \Vdash \varphi$.

Pojem splňování na rámci nás vede k definovatelnosti tříd rámců.

Definice 1.4.2. *Buď F nějaká třída rámců. Pak o formuli φ prohlásíme, že tuto třídu definuje, pokud pokud do ní libovolný rámec $\mathbb{F}$ patří právě tehdy, když v tomto rámci formule φ platí, tedy*

$$\forall \mathbb{F}(\mathbb{F} \in \mathrm{F} \iff \mathbb{F} \Vdash \varphi).$$

Podobně lze hovořit také o definovatelnosti na úrovni modelů vzhledem ke globální platnosti formulí. Nyní můžeme uvažovat různé třídy rámců podle vlastností relace dosažitelnosti R a ptát se, které z nich jsou definovatelné, tedy ke kterým existuje formule φ, která je definuje. Prvním jednoduchým příkladem může být třída všech reflexivních rámců, tedy rámců, o jejichž relaci dosažitelnosti R platí:

$$\forall w \in W(wRw).$$

Ukážeme si, že tuto třídu definuje formule $\Box p \to p$, kde p je atomická formule.

Lemma 1.4.3. *Buď F třída právě všech reflexivních rámců $\mathbb{F}$. Pak platí*

$$\forall \mathbb{F}(\mathbb{F} \in \mathrm{F} \iff \mathbb{F} \Vdash \Box p \to p).$$

Důkaz. Musíme dokázat obě implikace lemmatu. Zleva doprava budeme dokazovat přímo, zprava doleva kontrapositivně.

($\to$) :Máme libovolný reflexivní rámec $\mathbb{F}$. Uvažujme libovolný z něj vytvořený model $\mathbb{M}$ a v něm svět w takové, že $\mathbb{M}, w \Vdash \Box p$. To znamená, že v každém světě v takovém, že wRv je atom p splněn. Z reflexivity rámce potom dostáváme wRw. Tím pádem také $\mathbb{M}, w \Vdash p$.

($\leftarrow$) :Mějme dán nereflexivní rámec $\mathbb{F}$. Chceme ukázat, že $\mathbb{F} \nVdash \Box p \to p$, což znamená najít nad tímto rámcem model $\mathbb{M}$ a v něm svět w takové, že $\mathbb{M}, w \nVdash \Box p \to p$. Nereflexivita nám zaručuje existenci takového světa w, že $\neg(wRw)$. Přidejme k rámci valuaci V, která v každém světě v, o kterém platí wRv splní atom p a přitom tento atom nesplní v samotném světě w. Potom máme $\mathbb{M}, w \Vdash \Box p$ a zároveň $\mathbb{M}, w \nVdash p$, tedy $\mathbb{F} \nVdash \Box p \to p$.

$\Box$

Analogicky bychom si mohli ukázat, že tutéž třídu rámců definuje také formule $p \to \Diamond p$. Lze se ptát, jaký je vztah mezi formulemi, které definují tutéž třídu rámců a je zajímavé uvědomit si, že nemusejí být ekvivalentní, tedy najdeme model a v něm možný svět takové, že v tomto světě jedna z oněch formulí platí a druhá ne. V našem případě stačí vzít v úvahu model $\mathbb{M}$ s jediným možným světem w, v němž je splněn atom p, a s prázdnou relací dosažitelnosti R. Je zřejmé, že implikace $\Box p \to p$ tady platit bude, zatímco $p \to \Diamond p$ nikoliv. Ukažme si ale ještě několik dalších příkladů na definovatelnost tříd rámců. Formule $\Box p \to \Box\Box p$ definuje třídu transitivních rámců, tedy rámců, pro jejichž relaci dosažitelnosti platí

$$\forall w \forall u \forall v (wRu \ \& \ uRv \ \Rightarrow \ wRv).$$

Lemma 1.4.4. *Buď* F *třída právě všech transitivních rámců* $\mathbb{F}$. *Pak platí*

$$\forall \mathbb{F} (\mathbb{F} \in \mathrm{F} \iff \mathbb{F} \Vdash \Box p \to \Box\Box p).$$

Důkaz. ($\to$) :Mějme transitivní rámec $\mathbb{F}$ a libovný nad ním vytvořený model $\mathbb{M}$ a v něm libovolný svět w. Mějme v tomto světě splněnu formuli $\Box p$. Vezměme si libovolný svět u takový, že wRu a uvažujme, zda $\mathbb{M}, u \Vdash \Box p$. Ptáme se tedy, zda je v libolném světě v takovém, že uRv platí atom p. Z trasitivity relace dosažitelnosti ale víme, že wRv a z$\mathbb{M}, w \Vdash \Box p$ můžeme usoudit na požadované $\mathbb{M}, v \Vdash \Box p$.

($\leftarrow$) :K rámci $\mathbb{F}$, který nesplňuje transitivitu, hledáme model $\mathbb{M}$ a svět w, aby $\mathbb{M}, w \nVdash \Box\Box p \to \Box p$. Protože neplatí transitivita, máme zaručenu existenci světů w, u, v takových, že wRu, uRv, ale $\neg(wRv)$. Nechť valuace V splňuje atom p ve všech světech dosažitelných ze světa w a nesplňuje jej ve světě v. Pak tedy platí $\mathbb{M}, w \Vdash \Box p$, ale $\mathbb{M}, u \nVdash \Box p$, a to díky světu v. Tím pádem dostáváme požadované $\mathbb{M}, w \nVdash \Box p \to \Box\Box p$.

$\Box$

Trochu sofistikovaější je vlastnost tzv. ekulidovské dosažitelnosti, tedy

$$\forall w \forall u \forall v (wRu \ \& \ wRv \ \to \ uRv).$$

Tato vlastnost zaručuje, že když máme ze světa w dosažitelný svět u a svět v, pak jsou tyto dva světy dosažitelné také navzájem, takže platí nejenom uRv, ale také vRu. Navíc speciálně máme také zaručeno, že každý svět v dosažitelný ze světa w je reflexivní, tedy vRv. Tato vlastnost je navíc definovatelná.

Lemma 1.4.5. *Buď* F *třída právě všech rámců* $\mathbb{F}$ *s vlastností euklidovské dosažitelnosti. Pak platí*

$$\forall \mathbb{F}(\mathbb{F} \in \mathrm{F} \iff \mathbb{F} \Vdash \Diamond p \to \Box\Diamond p).$$

Důkaz. $(\to)$:Mějme rámec $\mathbb{F}$ s vlastností ekulidovské dosažitelnosti a k němu model $\mathbb{M}$ a svět w. Nechť platí $\mathbb{M}, w \Vdash \Diamond p$. Pak stačí ověřit, že $\mathbb{M}, w \Vdash \Box\Diamond p$. Splněnost formule $\Diamond p$ nám zaručuje existenci světa v takového, že wRv, v němž je splněn atom p. Mějme pak libovolný další svět u, kterým můžeme být také sám svět v, který je dosažitelný ze světa w. Díky euklidovské dosažitelnosti máme uRv, tedy $\mathbb{M}, u \Vdash \Diamond p$. Přesně to odpovídá požadovanému $\mathbb{M}, w \Vdash \Box\Diamond p$.

$(\leftarrow)$:K rámci $\mathbb{F}$, který nesplňuje euklidovskou dosažitelnost, hledáme model $\mathbb{M}$ a svět w, aby $\mathbb{M}, w \nVdash \Diamond p \to \Box\Diamond p$. Protože neplatí euklidovská dosažitelnost, máme světy w, u, v, takové, že wRu a zároveň wRv, ale $\neg(uRv)$. Nechť je v jediný svět, ve kterém je splněn atom p. Pak máme $\mathbb{M}, w \Vdash \Diamond p$, ale $\mathbb{M}, u \nVdash \Diamond p$,tedy $\mathbb{M}, u \nVdash \Box\Diamond p$. To odpovídá požadovanému $\mathbb{M}, w \nVdash \Diamond p \to \Box\Diamond p$.

□

Jak je vidět, důkazy vypadají pořád stejně, proto definovatelnost dalších vlastností zmíním pouze jako lemma, ale důkazy už nechám na čtenáři. Poměrně subtilní je už požadavek, aby byl rámec transitivní a zároveň obráceně fundovaný, tedy aby každá posloupnost světů $w, u, v, x, \ldots$ takových, že $wRu, uWv, vWx, \ldots$ byla konečná. Takovéto rámce tedy nejdou donekonečna napravo podél relace R.

Lemma 1.4.6. *Buď* F *třída právě všech rámců* $\mathbb{F}$*, které jsou transitivní a obráceně fundované. Pak platí*

$$\forall \mathbb{F}(\mathbb{F} \in \mathrm{F} \iff \mathbb{F} \Vdash \Box(\Box p \to p) \to \Box p).$$

Formuli, která definuje zmíněnou vlastnost, se říká Loebův axiom. Ještě se můžeme podívat také na vlastnost seriality, tedy

$$\forall w \exists v (wRv),$$

což znamená, že z každého světa je nějaký svět dosažitelný.

Lemma 1.4.7. *Buď* F *třída právě všech rámců* $\mathbb{F}$ *s vlastností seriality. Pak platí*

$$\forall \mathbb{F}(\mathbb{F} \in \mathrm{F} \iff \mathbb{F} \Vdash \Diamond \top).$$

Tutéž třídu rámců definuje také možná méně intuitivní formule $\Box p \to \Diamond p$. Posledním snadným příkladem je třída rámců s prázdnou relací dosažitelnosti, tedy třída, v níž jsou všechny světy izolované.

Lemma 1.4.8. *Buď* F *třída právě všech rámců* $\mathbb{F}$ *s prázdnou relací dosažitelnosti. Pak platí*

$$\forall \mathbb{F}(\mathbb{F} \in \mathrm{F} \iff \mathbb{F} \Vdash \Box\bot).$$

Formule, které definují nějakou zajímavou třídu rámců bývají často předmětem úvah o modálních axiomatických teoriích. Nyní si ale budeme chtít ukázat, jaké jsou meze definovatelnosti, a to nejenom na rámcích, ale také na modelech.

1.5 Isomorfismus

Kromě definovatelnosti na rámci lze uvažovat také definovatelnost na modelech, a to jak vzhledem ke splňování lokálnímu, tak ke splňování globálnímu. Samozřejmě platí, že v modelu je globálně splněno více formulí než kolik jich je splněno v rámci, nad nímž model vznikl. Možná by se mohlo zdát, že potom bude muset být také více formulí, které budou odlišovat modely podle jejich vlastností, ale opak je pravdou, takže více modelů sdílí více splněných formulí.

Definice 1.5.1. *Buď* M *libovolná třída modelů. Pak o formuli* φ *prohlásíme, že tuto třídu definuje, pokud platí*

$$\forall \mathbb{M}(\mathbb{M} \in \mathrm{M} \iff \mathbb{M} \Vdash \varphi).$$

Dále můžeme ještě uvažovat vlastnosti konkrétního možného světa v modelu. Tady se později ukáže možnost definovat pomocí modální formule ještě omezenější. Vlastností, které lze uvažovat u jediného světa je také méně, např. nemá smysl mluvit o transitivitě, ale třeba o reflexivitě ano.

Definice 1.5.2. *Buď* P *libovolná vlastnost možných světů. Pak formule* φ *tuto vlastnost definuje, jestliže*

$$\forall \mathbb{M} \forall w(\mathbb{M}, w \textit{ má vlastnost } P \iff \mathbb{M}, w \Vdash \varphi).$$

Nyní se budeme ptát, kdy jsou dva rámce, modely nebo světy nerozlišitelné modální formulí. Budeme se tedy ptát, kdy např. ve dvou modelech platí tytéž formule. První a přímočarou odpověď dává isomorfismus, definovaný podobně jako v klasické predikátové logice.

Definice 1.5.3. *Nechť jsou* $\mathbb{M}_1(W_1, R_1, V_1)$ *a* $\mathbb{M}_2(W_2, R_2, V_2)$ *dva modální modely a* $f : W_1 \to W_2$ *je funkce mezi nimi. Pak tato funkce je isomosfismus, jestliže splňuje následující podmínky:*

(i) *f je prostá. Tedy ke každému $w \in W_2$ existuje nejvýše jedno $v \in W_1$ takové, že $f(v) = w$.*

(ii) *f je zobrazuje W_1 na W_2. Tedy*

$$\forall w \in W_2\ \exists v \in W_1(f(v) = w).$$

(iii) *f oboustranně zachovává relaci dosažitelnosti:*

$$\forall v \in W_1\ \forall w \in W_1(vR_1w \iff f(v)R_2f(w)).$$

(iii) *f k sobě přiřazuje světy, v nichž platí tytéž atomy, takže pro libolný atom p platí*

$$\forall w \in W_1(w \in V_1(p) \iff f(w) \in V_2(p)).$$

Dva modely nazveme isomorfními, pokud mezi nimi existuje nějaký isomorfismus. Snadno se ukáže, že isomorfismus zachovává splněnost libovolné modální formule.

Věta 1.5.4. *Buď f isomorfismus mezi dvěma modely $\mathbb{M}_1$ a $\mathbb{M}_2$. Pak pro každý svět $w \in \mathbb{M}_1$ a pro každou formuli φ platí*

$$\mathbb{M}_1, w \Vdash \varphi \iff \mathbb{M}_2, f(w) \Vdash \varphi.$$

Důkaz. Důkaz je zřejmý a postupuje indukcí podle složitosti formule φ. Podobný důkaz rozepíši, až když budu dokazovat obdobné tvrzení pro relaci bisimulace. □

1.6 Vázaný morfismus

Nyní si ukážeme, že si lze vystačit i se slabšími pojmy než je isomorfismus, pokud chceme ukázat, že ve dvou rámcích nebo modelech jsou splněny tytéž formule. Nepjprve se podíváme na pojem vázaného morfismu. Ten lze uvažovat jak mezi rámci, tak mezi modely. Nejprve zůstaneme na úrovni rámců.

Definice 1.6.1. *Nechť jsou $\mathbb{F}_1 = (W_1, R_1)$ a $\mathbb{F}_2 = (W_2, R_2)$ dva rámce a $f : W_1 \to W_2$ funkce mezi jejich množinami možných světů. Pak tuto funkci nazveme vázaným morfismem, jestliže platí následující podmínky*

(*i*) *:f zobrazuje W_1 na W_2.*

(*ii*) *:Jestliže pro $v, w \in W_1$ platí vR_1w, pak totéž platí i pro jejich obrazy, tedy $f(v)R_2f(w)$.*

(*ii*) *: Jestliže pro $f(v), f(w) \in W_2$ platí $f(v)R_2f(w)$, pak totéž platí i pro jejich vzory, tedy vR_1w.*

Přidáním podmínky, které se říká atomická harmonie, dostaneme vázaný morfismus mezi dvěma modely.

Definice 1.6.2. *Nechť jsou $\mathbb{M}_1 = (W_1, R_1)$ a $\mathbb{M}_2 = (W_2, R_2)$ dva modely a $f : W_1 \to W_2$ funkce mezi jejich množinami možných světů. Pak tuto funkci nazveme vázaným morfismem mezi těmito modely, jestliže platí následující podmínky*

(*i*) *:f je vázaným morfismem mezi rámci, nad nimiž jsou uvažované modely.*

(*ii*) *: Je splněna atomická harmonie, tedy pro každý atom p a pro každý možný svět $w \in W_1$ platí*

$$\mathbb{M}_1, w \Vdash p \iff \mathbb{M}_2, f(w) \Vdash p.$$

Vázaný morfismus stejně jako isomorfismus zachovává splněnost formulí na obě strany.

Věta 1.6.3. *Buď f vázaný morfismus mezi dvěma modely $\mathbb{M}_1$ a $\mathbb{M}_2$. Pak pro každý svět $w \in \mathbb{M}_1$ a pro každou formuli φ platí*

$$\mathbb{M}_1, w \Vdash \varphi \iff \mathbb{M}_2, f(w) \Vdash \varphi.$$

Důkaz podám až v sekci o bisimulaci. Toto tvrzení lze ovšem rozšířit i na platnost globální.

Věta 1.6.4. *Buď f vázaný morfismus mezi dvěma modely $\mathbb{M}_1$ a $\mathbb{M}_2$. Pak pro každou formuli varphi platí*

$$\mathbb{M}_1 \Vdash \varphi \iff \mathbb{M}_2 \Vdash \varphi.$$

Důkaz. Protože je *f* funkce, která zobrazuje jeden model na druhý, najdeme ke každému světu v modelu $\mathbb{M}_2$ aspoň jeden svět ve druhém modelu, v němž platí přesně tytéž modální formule, což nám zaručuje předchozí věta. Tatáž úvaha platí i naopak, protože *f* je totální. Dále si stačí uvědomit, že množina formulí, které platí v nějakém modelu globálně, je průnikem množin formulí, které platí lokálně v některém z možných světů. □

Právě dokázaná věta nám pomůže dokázat také podobnou, i když slabší korespondeci na úrovni rámců.

Věta 1.6.5. *Buď f vázaný morfismus mezi dvěma rámci $\mathbb{F}_1$ a $\mathbb{F}_2$. Pak pro libovolnou formuli φ platí*

$$\mathbb{F}_1 \Vdash \varphi \implies \mathbb{F}_2, \Vdash \varphi.$$

Důkaz. Buď φ libovolná formule, pro kterou platí $\mathbb{F}_1 \Vdash \varphi$. Chceme dokázat, že potom také $\mathbb{F}_2 \Vdash \varphi$. To znamená dokázat pro každý model $\mathbb{M}_2$ nad rámcem $\mathbb{F}_2$, že platí $\mathbb{M}_2 \Vdash \varphi$. Vezměme si tedy libovolný takovýto model. Pak k jeho valuaci V_2 můžeme uvažovat valuaci V_1 rámce $\mathbb{F}_1$, která v každém světě $w \in W_1$ nechá splnit přesně ty atomy, které jsou splněny ve světě $f(w)$. Pak lze použít předchozí větu. □

Mohli bychom podobným postupem dokázat také opačnou implikaci? Nikoliv, uvědomme si, že vázaný morfismus *f* nemusí být prostá funkce. Mohl by tak například existovat svět $w \in W_2$, který by měl dva vzory, svět u a svět v. Nechť potom máme valuaci V_1, která atom p splní ve světě u, ale nikoliv ve světě v. Pak nenajdeme odpovídající valuaci pro druhý rámec. Navíc si také ukážeme, že opačná implikace může být skutečně porušena. Důležité je následující lemma, ukazuje nám možné použití vázaného morfismu.

Lemma 1.6.6. *Buď* F *třídá rámců, kterou definuje formule φ. Nechť dále $f\colon W_1 \to W_2$ je vázaný morfismus mezi množinami možných světů rámců $\mathbb{F}_1$ a $\mathbb{F}_2$. Pak jestliže rámec $\mathbb{F}_1$ náleží do třídy* F*, tedy $\mathbb{F}_1 \in \mathrm{F}$, pak do této třídy náleží také rámec $\mathbb{F}_2$.*

Důkaz. použije se předchozí věta. Protože vázaný morfismus přenáší platnost formulí, tak platí $\mathbb{F}_2 \Vdash \varphi$. Protože formule φ definuje třídu F, dostáváme $\mathbb{F}_2 \in F$. □

To znamená, že když uvažujeme nějakou třídu a rámců F najdeme dva rámce $\mathbb{F}_1$ a $\mathbb{F}_2$ takové, že $\mathbb{F}_1$ této třídě náleží, zatímco $\mathbb{F}_2$ nikoliv a najdeme vázaný morfismus $f\colon W_1 \to W_2$ mezi těmito dvěma rámci, pak třída F není definovatelná modální formulí. Našli jsme totiž rámec, který do ní nepatří, totiž $\mathbb{F}_1$, a přitom jsou v něm splněny všechny formule, které jsou splněny v rámci, který do této třídy patří, totiž $\mathbb{F}_2$. Nyní si ukážeme dva jednoduché příklady nedefinovatelných tříd. Prvním příkladem bude třída rámců nereflexivních, tedy takových, o jejichž relaci dosažitelnosti R platí

$$\exists w \in W(\neg(wRw)).$$

Lemma 1.6.7. *Třída* F *všech nereflexivních rámců není definovatelná modální formulí.*

Důkaz. Uvažujme dva následující rámce $\mathbb{F}_1$ a $\mathbb{F}_2$:

(1) $\mathbb{F}_1$ je rámec se dvěma světy, z nichž jeden je reflexivní, zatímco druhý nikoli a ten reflexivní je dosažitelný z nereflexivního. Tedy $W_1 = \{u, v\}$ a $R_1 = \{< u, v >, < v, v >\}$.

(2) $\mathbb{F}_1$ je rámec s jediným reflexivním světem. Tedy $W_2 = \{w\}$ a $R_2 = \{< w, w >\}$.

Nyní uvažujme funkci $f : W_1 \to W_2$, která oba světy z W_1 zobrazí na jediný svět ve W_2. Je zřejmé, že tato funkce je vázaný morfismus. To znamená, že každá formule φ taková, že $\mathbb{F}_1 \Vdash \varphi$ musí být splněna také v reflexivním rámci, tedy $\mathbb{F}_2 \Vdash \varphi$. Kdyby tedy byla třída F definovatelná modální formulí, patřil by do ní i rámec $\mathbb{F}_2$, což je v rozporu s jeho předpokládanou reflexivitou. □

Tento příklad nám také ukazuje, že ve větě 1.6.5 neplatí opačná implikace. Ve lemmatu 1.4.3 jsme si ukázali, že třída všech reflexivních rámců je definována formulí

$$\Box p \to p.$$

To znamená, že v nereflexivním rámci $\mathbb{F}_1$ tato formule nemůže platit, ačkoli platí v rámci $\mathbb{F}_2$ a máme vázaný morfismus $f : W_1 \to W_2$ mezi jejich množinami možných světů. Neexistuje ani žádná formule, která by definovala třídu všech rámců antireflexivních, tedy rámců, o jejichž relaci dosažitelnosti platí

$$\forall w \in W(\neg(wRw)).$$

Lemma 1.6.8. *Třída všech antireflexivních rámců není definovatelná modální formulí.*

Důkaz. Uvažujme dva následující rámce $\mathbb{F}_1$ a $\mathbb{F}_2$:

(1) $\mathbb{F}_1$ je rámec, jehož nekonečná množina možných světů vypadá jako přirozená čísla a jehož relace dosažitelnosti vypadá jako relace $<$. Tedy $W_1 = \{w_0, w_1, w_2, \dots\}$ a $R_2 = \{< w_0 R_1 w_1 >, < w_1 R_1 w_2 >, \dots\}$

(2) $\mathbb{F}_2$ je rámec s jediným reflexivním světem. Tedy $W_2 = \{w\}$ a $R_2 = \{< w, w >\}$.

Nyní uvažujme funkci $f : W_1 \to W_2$, o které platí

$$\forall v \in W_1(f(v) = w),$$

kde w je jediný svět rámce $\mathbb{F}_2$. Opět je zřejmé, že tato funkce je vázaným morfismem. Dále můžeme zopakovat stejnou úvahu jako u nedefinovatelnosti nereflexivity. □

1.7 Bisimulace

Nyní si ukážeme bisimulaci jako pojem ještě jednodušší než vázáný morfismus. Přitom nám bude na úrovni modelů pořád zaručovat modální ekvivalenci. Nakonec také naznačím, jak bisimulace ujasňuje vztah modální a klasické predikátové logiky.

Definice 1.7.1. *Nechť jsou $\mathbb{M}_1 = (W_1, R_1, V_1)$ a $\mathbb{M}_2 = (W_2, R_2, V_2)$ dva modální modely a $B \subseteq W_1 \times W_2$ binární relace na jejich množinách možných světů. Pak tuto relaci nazveme bisimulací, jestliže splňuje následující podmínky pro libovolné dva světy $v \in W_1$ a $w \in W_2$ takové, že vBw :*

(i) *Atomická harmonie, takže pro libovolnou atomickou formuli p platí*

$$\mathbb{M}_1, v \Vdash p \Longleftrightarrow \mathbb{M}_2, w \Vdash p.$$

(ii) *Cik - Každému světu, který je přístupný relací dosažitelnosti ze světa v odpovídá nějaký bisimilární svět ve druhém modelu, tedy*

$$vR_1x \implies \exists y \in W_2(wR_2y \ \& \ xBy)$$

(iii) *Cak - To, co říká podmínka (ii) platí i naopak:*

$$wR_2y \implies \exists x \in W_2(vR_2x \ \& \ yBx).$$

Oproti vázanému morfismu došlo ke zmírnění dvou požadavků. Jednak nevyžadujeme, aby bisimulace byla funkce, jednak nemusí vyčerpávat ani jeden model, tedy v obou modelech mohou být světy, které v relaci bisimulace nejsou. Není těžké nahlédnout, že mezi dvěma strukturami může být také více relací, které jsou bisimulacemi. Přitom o dvou modelech, mezi nimiž existuje alespoň jedna bisimulace, budeme říkat, že jsou bisimilární. Nyní si ukážeme, že tato relace je relací ekvivalence, pokud ji uvažujeme na jediném modelu. Přesněji řečeno, možnost být v nějaké bisimulaci je relace ekvivalence. Pomůžeme si tím, že budeme uvažovat sjednocení všech bisimulací na modelu. Je zřejmé, že sjednocení bisimulací je stále bisimulace.

Lemma 1.7.2. *Relace B na modelu $\mathbb{M}$, která je sjednocením všech bisimulací na něm (a je tedy sama bisimulace), je relací ekvivalence, takže splňuje reflexivitu, transitivitu a symetrii, tj.*

$$wBv \implies vBw.$$

Důkaz. Nechť je $\mathbb{M}_1 = (W_1, R_1, V_1)$ modální model a $B \subseteq W \times W$ je sjednocení všech bisimulací na něm. Postupně ověříme, že splňují reflexivitu, symetrii a transitivitu:

(i) Pro reflexivitu plyne bezprostředně z definice.

(ii) Pro symetrii stačí zaměnit podmínku $ii)$ za podmínku $iii)$ v definici bisimulace.

(*iii*) Pro transitivitu uvažujme světy $u, v, w \in W$ takové, že platí uBv a vBw. Ukážeme si, že potom lze tvrdit také uBw. Musíme tedy postupně ověřit všechny tři podmínky pro bisimulaci. Pokud jde o atomickou harmonii, není co dokazovat. Pokud jde o podmínku Cik, uvažujme svět x takový, že uRx. Protože uBv, existuje svět y takový, že $vRv^{'}$ a xBy. Existence světa y nám pak ale zaručuje existenci světa z takového, že wRz a yBz. Není pak obtížné nahlédnout, že xBz. Podmínka Cak se ověří analogicky.

□

V lemmatu jsme uvažovali bisimulaci na jediném modelu spíše proto, aby byl důkaz jednodušší, ale tvrzení lze rozšířit i na bisimulace mezi různými modely. Postupně lze ukázat reflexivitu, symetrii a transitivitu. Platí tedy, že na každém modelu lze udělat bisimulaci, např. prostou relací identity, dále že když máme relaci bisimulace mezi dvěma modely, tak můžeme tuto relaci převrátit a stále zůstane bisimulací. Také když máme modely $\mathbb{M}_1$ $\mathbb{M}_2$ a $\mathbb{M}_3$ a mezi nimi bisimulace B_1 a B_2, může ziskat bisimulaci tím, že B_1 a B_2 složíme.

Jak je z dosavadního výkladu zřejmé, bisimulace je zamýšlena především jako vztah mezi dvěma strukturami, který zaručuje modální ekvivalenci. Nyní ověříme, že tento úkol splňuje.

Věta 1.7.3. *Nechť jsou $\mathbb{M}_1 = (W_1, R_1, V_1)$ a $\mathbb{M}_2 = (W_2, R_2, V_2)$ dva modální modely a B je některá relace bisimulace mezi nimi. Pak pro libovolné dva světy $v \in W_1$ a $w \in W_2$ platí, že pokud jsou v bisimulaci, pak jsou modálně ekvivalentní. Jinak řečeno, pro každou modální formuli φ platí*

$$(vBw) \implies (\mathbb{M}_1, v \Vdash \varphi \Longleftrightarrow \mathbb{M}_1, w \Vdash \varphi).$$

Důkaz. Mějme dva světy v a w, jak jsou popsány výše a nechť navíc platí $\mathbb{M}_1, v \Vdash \varphi$. Ukážeme, že potom také $\mathbb{M}_2, w \Vdash \varphi$ (opačná implikace se dokáže analogicky). Budeme postupovat indukcí podle složitosti formule φ:

(*i*) Pro atom plyne tato věta bezprostředně z atomické harmonie.

(*ii*) Pro negaci - Nechť $\varphi = \neg\psi$. To znamená, že $\mathbb{M}_1, v \nVdash \psi$. Pak stačí použít indukční předpoklad na formuli ψ a dostaneme $\mathbb{M}_2, w \nVdash \psi$, tedy $\mathbb{M}_2, w \Vdash \varphi$.

(*iii*) Pro konjunkci - Nechť $\varphi = \psi \wedge \chi$. Víme, že $\mathbb{M}_1, v \Vdash \psi$ a $\mathbb{M}_1, v \Vdash \chi$. Pak stačí použít indukční předpoklad na formule ψ a χ.

(*iii*) Pro modalitu nutnosti - Nechť $\varphi = \Box\psi$. Nechť $y \in W_2$ je libovolný svět takový, že wR_2y. Podmínka Cak nám dává svět $x \in W_1$ takový, že vR_1x a navíc xBy. Pak stačí použít indukční předpoklad na formuli ψ.

(*iv*) Pro modalitu možnosti - Nechť $\varphi = \Diamond\psi$. Pak postupujeme podobně jako u modality nutnosti, pouze začneme světem x v prvním modelu a použijeme podmínku Cik.

□

Pokud navíc relace bisimulace vyčerpá všechny světy obou modelů, lze předchozí větu použít také na platnost globální.

Věta 1.7.4. *Nechť jsou* $\mathbb{M}_1 = (W_1, R_1, V_1)$ *a* $\mathbb{M}_2 = (W_2, R_2, V_2)$ *dva modální modely a* B *je některá relace bisimulace mezi nimi, která vyčerpává všechny světy obou modelů, takže pro každý svět* $v \in W_1$ *existuje svět* $w \in W_2$ *takový, že* vBw*. Nechť totéž platí naopak i pro každý svět z druhého modelu. Potom jsou oba modely ekvivalentní, takže o každé formuli* φ *lze říci:*

$$\mathbb{M}_1 \Vdash \varphi \iff \mathbb{M}_2 \Vdash \varphi.$$

Důkaz. Stačí si uvědomit, že každému světu v modelu $\mathbb{M}_1$ odpovídá nějaký svět v modelu $\mathbb{M}_2$, v němž platí přesně tytéž formule. Navíc žádné další světy v modelu $\mathbb{M}_2$ nejsou. Množina formulí, které v nějakém modelu platí globálně je průnikem všech formulí, které platí lokálně aspoň v jednom z jeho světů. Je zřejmé, že u obou modelů bude tento průnik stejný. □

Pro konečné modely lze větu 1.7 dokonce obrátit.

Věta 1.7.5. *Nechť jsou* $\mathbb{M}_1 = (W_1, R_1, V_1)$ *a* $\mathbb{M}_2 = (W_2, R_2, V_2)$ *dva konečné modely a* $v \in W_1$ *a* $w \in W_2$ *dva světy v nich, které jsou modálně modálně ekvivalentní, takže v nich platí přesně tytéž modální formule. Pak mezi těmito modely existuje relace* B*, která je bisimulace a ve které jsou oba zmíněné světy, tedy* vBw*.*

Důkaz. Nechť u a v jsou výše popsané světy. Vezměme za relaci B právě relaci modální ekvivalence mezi světy. Ukážeme, že splňuje všechny tři podmínky pro bisimulaci.

(*i*) Atomická harmonie plyne bezprostředně z modální ekvivalence

(*ii*) Cik - Nechť x je svět takový, že vR_1x. Nechť pro spor není v druhém modelu žádný svět y takový, že wR_2y a xBy. Protože je ze světa v dosažitelný svět x, tak platí $\mathbb{M}_1, v \Vdash \Diamond\top$. Z modální ekvivalence plyne, že formule $\Diamond\top$ je splněna také ve světě w. To znamená, že množina $N = \{y; wR_2y\}$ všech světů, které jsou dosažitelné ze světa w je neprázdná. Navíc musí být konečná, protože celý model $\mathbb{M}_2$ je konečný. Můžeme tuto množinu tedy psát jako $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Protože žádný z těchto světů není v relaci B se světem x, musí pro každý z nich existovat formule ψ_i taková, že $\mathbb{M}_1, x \Vdash \psi_i$ a $\mathbb{M}_2, y_i \nVdash \psi_i$. Potom ovšem $\mathbb{M}_1, v \Vdash \Diamond(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$, ale $\mathbb{M}_2, w \nVdash \Diamond(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n)$. To je ovšem v rozporu s předpokládanou modální ekvivalencí světů v a w.

(*iii*) Cak se dokáže obdobně jako Cik.

□

Právě dokázanou větu lze některými kroky rozšířit i na některé třídy nekonečných modelů. Konktrétně pro takové modely, v nichž má každý svět jen konečně mnoho následníků, by ale důkaz vypadal zcela stejně jako ten, který byl právě předeveden.

1.7.1 Několik příkladů bisimulace

Nejprve si uveďme dvě lemmata, která nepotřebují důkaz.

Lemma 1.7.6. *Každý isomorfismus je bisimulace.*

Lemma 1.7.7. *Každý vázaný morfismus mezi modely je bisimulace.*

V obou případech není co dokazovat, protože podmínky, které klademe na bisimulaci jsou vlastně oslabením podmínek kladených na vázaný morfismus a ty jsou zase oslabením podmínek kladených na isomorfismus. Tím pádem máme také už několik příkladů bisimulace, a to sice všechny vázané morfismy, které jsme uvedli v sekci o vázaném morfismu. Podívejme se na některé další. První příklad nám ukáže, jak lze bisimulaci využít k tomu, abychom daný model $\mathbb{M}$ udělali co nejmenším a přitom z modální hlediska ekvivalentním.

Lemma 1.7.8. *Buď $\mathbb{M}_1 = (W_1, R_1, V_1)$ modální model. Uvažujme relaci $B \subseteq W_1 \times W_1$, která je sjednocením všech relací bisimulace na tomto modelu(a je tedy největší bisimulací). Pro každý svět w pak označme $[w] = \{v; wBv\}$ jeho třídu ekvivalence získanou relací B. Uvažme dále model $\mathbb{M}_2 = (W_2, R_2, V_2)$, jehož množina možných světů je množinou tříd ekvivalence $[w]$ v předchozím modelu, valuace nechá v každé třídě ekvivalence splnit tytéž atomy jako v jejích prvcích a relace dosažitelnosti R_2 vypadá následovně:*

$$< [v], [w] >\in R_2 \iff \exists x \in [v] \exists y \in [w](xR_1y).$$

Pak relace $\mathbb{B} \subseteq W_1 \times W_2$, která každému světu w přiřadí jeho třídu ekvivalence $[w]$ je bisimulace.

Důkaz. Potřebujeme ověřit všechny tři podmínky pro bisimulaci. Atomickou harmonii zaručuje konstrukce valuace V_2. Podmínka Cik plyne podobně bezprostředně z konstrukce relace dosažitelnosti R_2. Zbývá pak ověřit podmínku Cak. Mějme tedy svět $w \in W_1$ a jeho třídu ekvivalence $[w]$. Platí tedy $w\mathbb{B}[w]$. Navíc předpokládejme, že existuje další třída ekvivalence $[v]$ taková, že $[w]R_2[v]$. Z definice relace R_2 víme, že existují světy $x \in [w]$ a $y \in [v]$ takové, že xR_1y. Protože jsou světy x a w v téže třídě ekvivalence, jsou v bisimulaci B, tedy wBx. Potom z podmínky Cak dostáváme svět $u \in W_1$ takový, že wR_1u a také uBy. To znamená, že svět u a svět y je ve stejné třídě ekvivalence. Tím pádem tedy $u\mathbb{B}[v]$, což nám spolu s již konstatovaným wR_1u dává požadovanou podmínku Cak pro relaci B. □

Dalším snadným příkladem na použití bisimulace je disjunktní sjednocení různých modelů. Když dáme víme modelů do jednoho, pak každý z modelů, který toto sjednocení tvoří je s tímto sjednocením bisimilární.

Lemma 1.7.9. *Mějme modely $\mathbb{M}_i = (W_i, R_i, V_i)$ opatřené idexy i z nějaké indexovací množiny I. Dále uvažme model $\mathbb{M} = (W, R, V)$, který vznikne jako jejich disjunktní sjednocení, tedy $W = \bigcup_{i \in I} W_i$, $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ a $V(p) = \bigcup_{i \in I} V_i(p)$ pro každý atom p. Přitom pokud nejsou někté modely disjunktní, vezmeme jejich isomorfní kopie, které disjunktní jsou. Pak každý model $\mathbb{M}_i$ je s modelem $\mathbb{M}$ bisimilární.*

Důkaz. Jako bisimulaci stačí vzít pro každý model $\mathbb{M}_i$ relaci identity. □

1.7.2 Bisimulace a standardní překlad

Dříve jsme si ukázali, že každou modální formuli lze přeložit do odpovídajícího prvořádového jazyka. Na druhou stranu ale také víme, že ne každá formule tohoto odpovídajícího jazyka je ekvivalentní překladu některé formule modální. Vyvstává tak přirozená otázka, zda lze nějak vymezit, které provořádové formule jsou ekvivalentní překladům modálních formulí. Jasnou odpověď v tomto případě dostaneme díky relaci bisimulace. Nejprve ale musíme zavést nový pojem.

Definice 1.7.10. *O prvořádové formuli jedné proměnné $\varphi(x)$ prohlásímě, že je invariantní na bisimulaci, jestliže pro každé dva prvořádové modely $\mathbb{W}_1$ $\mathbb{W}_2$, které odpovídají nějakým modelům modálním, a každé dva jejich světy $v \in W_1$, $w \in W_2$ a každou bisimulaci B mezi těmito dvěma modely takovou, že vBw, platí*

$$\mathbb{W}_1 \models \varphi(x)[x/v] \iff \mathbb{W}_2 \models \varphi(x)[x/w].$$

Tento pojem nám umožní formulovat van Benthemovu větu, která vymezuje, jaký přesně fragment klasické provořádové logiky je ekvivalentní modální logice.

Věta 1.7.11. *Pro každou prvořádovou formuli $\varphi(x)$ v jazyce odpovídajícím modální logice jsou následující podmínky ekvivalentní:*

(i) *$\varphi(x)$ je ekvivalentní standardnímu překladu některé modální formule*

(ii) *$\varphi(x)$ je invariantní na bisimulaci.*

Implikace ($\rightarrow$) plyne z věty 1.7. Opačná implikace je mnohem obtížnější a nebudeme ji tady dokazovat. Zájemce odkazuji na [3].

Kapitola 2

Intuicionistická logika bez kontrakce

Bisimulaci lze uvažovat také u substrukturálních logik, což se pokusím ukázat na ituicionistické logice bez kontrakce. Bisimulace tady bude opět fungovat k ukázání nerozlišitelnosti struktur s odlišnými vlastnostmi a bude definována jen o něco málo složitěji, což bude odpovídat trochu složitější sémantice. Bisimulaci lze ovšem uvažovat také u intuicionistické logiky, jejíž sémantika odpovídá sémantice modální logiky. My se ale podíváme na logiku, která se modální logice podobá méně. V zásadě jde o intuicionistickou logiku, ale není v ní platné pravidlo kontrakce, tedy formule $\varphi \rightarrow (\varphi \& \varphi)$ není v této logice tautologická. Právě proto, aby bylo možné mít logiku bez pravidla kontrakce, budeme zde muset definovat rámec o něco složitěji než v předchozí kapitole. Vycházel jsem především z [4]. Protože se ale nezabývám substrukturálními logikami obecně, ale pouze jednou z nich, totiž intuicionistickou logikou bez kontrakce, definoval jsem některé pojmy, jako např. bisimulaci nebo vůbec sémantiku, jinak, konkrétněji, případně méně složitě. K tématu si lze přečíst také [5].

2.1 Vlastnosti rámců

Rámec je zde definován jako uspořádaná trojice, obsahujicí množinu světů W, binární relaci uspořádání na světech $\leq$ a ternární relaci dosažitelnosti R. Na obě relace přitom klademe určitá omezení. Nyní všechny pojmy zaveďme ve formálních definicích.

Definice 2.1.1. *Uspořádanou trojici $\mathbb{F} = (W, \leq, R)$ nazveme rámcem a W její množinou možných světů, jestliže je $\leq \subseteq W \times W$ uspořádání na možných světech množiny W a $R \subseteq W \times W \times W$ relace dosažitelnosti mezi možnými světy z množiny W.*

Dále definujme pojmy použité v předchozí definici, tedy obě relace.

Definice 2.1.2. *Binární relaci nazveme uspořádáním na možných světech, a značíme ji $\leq$, jestliže splňuje reflexivitu, transitivitu a slabou antisymetrii (tedy jestliže je částečným uspořádáním):*

(*i*) *reflexivita:* $\forall w \in W (w \leq w)$

(*ii*) *transitivita:* $\forall u \in W \forall v \in W \forall w \in W (u \leq v \& v \leq w \Longrightarrow u \leq w)$

(*iii*) *slabá antisymetrie:*$\forall v \in W \forall w\ inW (v \leq w \& w \leq v \Longrightarrow v = w)$

Později budu definovat také modely a platnost formulí, přičemž se ukáže, že, podobně jako v intuicionistické logice, bude splňování persistentní, tedy bude pro každou formuli zachováno podél uspořádání na světech. Dále si zaveďme ternární relaci dosažitelnosti na možných světech.

Definice 2.1.3. *Mějme množinu možných světů W a k ní binární relaci dosažitelnosi $\leq$. Ternární relaci $R \subseteq W \times W \times W$ nazveme relací dosažitelnosti na možných světech, jestliže splňuje následující podmíky:*

(*i*) *Za prvé chceme, aby bylo možno zaměnit první dva členy v relaci, tedy pokaždé, když platí $Rxyz$, pak platí také $Ryxz$, což zaručí platnost pravidla záměny.*

(*ii*) *Druhou podmínkou je, aby pokaždé, když $Rxyz$ a $z' \geq z$, pak existují $x' \geq x$ a $y' \geq y$ takové, že $Rx'y'z'$. Tato vlastnost se ukáže důležitá pro důkaz persistence valuace, tedy že se platnost formulí přenáší nahoru podél uspořádání na světech.*

(*iii*) *Dále chceme, aby pokaždé když $Rxyz$ a $x' \leq x$, tak také existují $y' \leq y$ a $z' \geq z$ takové, že $Rx'y'z'$.*

(*iii*) *Zápis typu $R(xy)zw$ znamená, že existuje u takové, že $Rxyu$ a zároveň $Ruzw$. V naší logice pak platí, že pokaždé, když $R(xy)zw$, pak také $Rx(yz)w$, což zajistí asociativitu konjunkce.*

(*v*) *Požadujeme také zpětně, aby kdykoli $Rx(yz)w$, pak také $R(xy)zw$.*

(*vi*) *Důležitá je také tzv. "plump" vlastnost, která říká, že pro každé x, y, z, x', y', z' taková, že $Rxyz$ a $x \leq x'$, $y \leq y'$ a $z \leq z'$, platí také $Rx'y'z'$.*

(*vii*) *Další vlastnost uvádí do vztahu relaci dosažitelnosti R a binární uspořádání $\leq$. Poslední člen v R je vždy nad oběma předcházejícími, tedy*

$$\forall u \forall v \forall w (Ruvw \Longrightarrow u \leq w \ \&\ v \leq w)$$

(*viii*) *Je-li svět x v částečném uspořádání pod světem y, pak existuje z, který je s nimi v ternární relaci R tak, že $Rzxy$:*

$$\forall x \in W \forall y \in W (x \leq y \implies \exists z \in W (Rzxy)).$$

Nemusí tady platit $Rxxx$, což by zaručovalo kontrakci. Je snadné nahlédnout, že body (*ii*) a (*iii*) vyplývají z bodu (*vi*).

Lemma 2.1.4. *Body (ii) a (iii) v definici 2.1.3 plynou z bodu (vi).*

Důkaz. V bodě (*ii*) stačí vzít za x' a y' samotné světy x a y, přičemž vycházíme z reflexivity uspořádání $\leq$. Pak už stačí aplikovat podmínku (*vi*). Podobě se postupuje i pokud jde o podmínku (*iii*). □

2.2 Modely a sémantika

Model získáme, když k rámci přidáme ještě valuaci V.

Definice 2.2.1. *Valuace je funkce z množiny atomů A do potence množiny možných světů W:*

$$V : A \longrightarrow P(W)$$

Přitom platí, že každému atomu p je přiřazena jen taková podmnožina $S \subseteq W$, která je horní množinou, tedy

$$v \in S \ \& \ v \leq w \Longrightarrow w \in S$$

Definice 2.2.2. *Uspořádanou čtveřici $\mathbb{M} = (W, \leq, R, V)$ nazveme modelem a W jeho množinou možných světů, jestliže je $\leq \subseteq W \times W$ uspořádání na možných světech množiny W a $R \subseteq W \times W \times W$ relace dosažitelnosti mezi možnými světy z množiny W a navíc je V valuace, která atomickým formulím přižauje podmnožiny množiny W.*

Mějme dán model $\mathbb{M}$. Indukcí definujeme splněnost formule ve světě w tohoto modelu. Pro atom p platí $w \Vdash p \Longleftrightarrow w \in V(p)$. Nikdy neplatí $w \Vdash \bot$, zato $w \Vdash \top$ platí vždy. Logické spojky jsou definovány následovně.

Disjunkce: $w \Vdash \varphi \vee \psi \Longleftrightarrow w \Vdash \varphi$ nebo $w \Vdash \psi$.

Slabá konjunkce: $w \Vdash \varphi \wedge \psi \Longleftrightarrow w \Vdash \varphi$ a $w \Vdash \psi$.

Silná konjunkce: $w \Vdash \varphi \& \psi \Longleftrightarrow \exists u \exists v (Ruvw$ a zároveň $u \Vdash \varphi$ a také $v \Vdash \psi)$.

Implikace: $w \Vdash \varphi \rightarrow \psi \Longleftrightarrow \forall u \forall v(\text{jestliže Rwuv, pak jestliže } u \Vdash \varphi, \text{ pak } v \Vdash \psi)$.

Negace: $w \Vdash \neg\varphi \Longleftrightarrow w \Vdash \varphi \rightarrow \bot$.

Podobně jako v předchozí kapitole můžeme také zavést globální splněnost v celém modelu.

2.2.1 Některé vlastnosti sémantiky

Když jsme definovali spňování fomule ve světě, můžeme ukázat některé zajímavé vlastnosti této sémantiky. Nejprve dokážeme větu o persistenci splňování formulí.

Věta 2.2.3. *Pro libovolnou formuli φ platí, že se její platnost zachovává podél binární relace $\leq$ na možných světech:*

$$w \Vdash \varphi \ \& \ w \leq v \Longrightarrow v \Vdash \varphi.$$

Důkaz. Předpokládejme $w \Vdash \varphi$, dále $w \leq v$ a indukcí podle složitosti formule φ dokážeme, že $v \Vdash \varphi$.

(i) Pokud je φ atom p, pak z definice modelu víme, že této formuli byla přiřazena horní množina. Takže platí $v \in V(p)$, a tudíž $v \Vdash \varphi$.

(ii) Disjunkce $\psi \vee \chi$ je ve světě w splňena, jetliže $w \Vdash \psi$ nebo $w \Vdash \chi$. V prvním případě nám indukční předpoklad dá $v \Vdash \psi$, ve druhém $v \Vdash \chi$. Obojí znamená, že $v \Vdash \psi \vee \chi$.

iii) Pro slabou konjunkci se tvrzení dokáže analogicky.

(iv) Když φ je tvaru $\psi \& \chi$, pak existují světy s, t takové, že $Rstw$ a zároveň $s \Vdash \psi$ a také $t \Vdash \chi$. Vlastnost (ii) ternární relace R z definice 2.1.3 nám pak zaručuje existenci světů x a y takových, že $Rxyv$ a zároveň $s \leq x$ a také $t \leq y$. Užitím indukčního předpokladu potom dostáváme $x \Vdash \psi$ a $y \Vdash \chi$, což podle definice znamená $v \Vdash \psi \& \chi$.

(v) Jestliže je konečně φ tvaru $\psi \to \chi$, pak vezměme libovolné světy s a t takové, že $Rvst$ a předpokládejme $s \Vdash \psi$. Chceme ukázat, že pak také $t \Vdash \chi$. K tomu využijeme vlastnost (vi) relace R a také reflexivitu $\leq$. Díky reflexivitě máme $s \leq s$ a $t \leq t$. Díky (vi) pak víme, že platí také $Rwst$. Protože v w platí $\psi \to \chi$, musí χ platit také ve světě t.

□

Ukážeme si také vztah mezi slabou a silnou konjunkcí. Platí, že silná konjunkce implikuje slabou, ale ne naopak.

Lemma 2.2.4. *Pro libovolný svět w v libovolném modelu $\mathbb{M}$ a pro libovolné formule ψ a χ platí: Jestliže $w \Vdash \psi \& \chi$, pak $w \Vdash \psi \wedge \chi$.*

Důkaz. Pokud ve světě w platí $\psi \& \chi$, pak existují světy u, v takové, že $Ruvw$ a $u \Vdash \psi$ a zároveň $v \Vdash \chi$. Ze vztahu (vii) ternární relace R a binární relace $\leq$ víme, že $u \leq w$ a také $v \leq$. Díky persistenci splňování platí $w \Vdash \psi$ a $w \Vdash \chi$, a tedy také slabá konjunkce $\psi \wedge \chi$. □

Abychom se přesvědčili, že neplatí opačná implikace, stačí uvážit model se třemi možnými světy u, v a w takovými, že $Ruvw$. Vw světě w může platit slabá konjunkce dvou atomických formulí, ale nemusí platit konjunkce silná. Nyní se podíváme na již zmiňovaná strukturní pravidla.

Lemma 2.2.5. *(A) Díky definicí 2.1.3 daným vlastnostem (iv) a (v) relace R platí asociativita, tedy*

$$(\varphi \& \psi) \& \chi \Longleftrightarrow \varphi \& (\psi \& \chi).$$

(B) Díky vlastnosti (i) relace R platí pravidlo záměny, tedy komutativita konjunkce:

$$\varphi \& \psi \Longleftrightarrow \psi \& \varphi.$$

(C) *Díky vztahu* (i) *mezi oběma relacemi platí pravidlo oslabení, tedy vždy platí formule* $\varphi \& \psi \rightarrow \varphi$.

Důkaz. Body A) a B) jsou zřejmé. Pokud jde o bod C) , tak víme, že když ve světě w platí $\varphi \& \psi$, pak existují světa u a v takové, že $u \Vdash \varphi$ a $v \Vdash \psi$. Pak stačí využít persistenci valuace dokázanou ve větě 2.2.3 . □

Mezi uvedenými strukturními vlastnostmi a vlastnostmi relace dosažitelnosti R platí i opačné vztahy, což lze snadno dokázat kontraposicí. V modelech, kde relace dosažitelnosti nedodržuje zmíněná pravidla tedy neplatí asociativita konjunkce, pravidlo záměny a pravidlo oslabení. Kdyby vždy platilo $Rwww$, pak by platilo pravidlo kontrakce, tedy $\varphi \rightarrow \varphi \& \varphi$.

2.2.2 Bisimulace

Nyní mužeme pro tuto sémantiku definovat relaci bisimulace.

Definice 2.2.6. *Mějme dva modely* $\mathbb{M}_1$ *a* $\mathbb{M}_2$ *a jejich množiny možných světů* W_1 *a* W_2*. Binární relace* $B \subseteq W_1 \times W_2$ *je bisimulace, jetliže platí následujícíh pět podmínek:*

(i) *Atomická harmonie -* $xBy \implies \forall p(x \Vdash p \Leftrightarrow y \Vdash p)$*. Ve světech, které jsou v relaci* B *tedy platí tytéž atomy.*

(ii) $xBy \;\&\; Rxwz \implies \exists u \exists v(Ryuv \;\&\; wBu \;\&\; zBv)$

(iii) $xBy \;\&\; Rwzx \implies \exists u \exists v(Ruvy \;\&\; wBu \;\&\; zBv)$

(iv) $xBy \;\&\; Rywz \implies \exists u \exists v(Rxuv \;\&\; wBu \;\&\; zBv)$

(v) $xBy \;\&\; Rwzy \implies \exists u \exists v(Ruvx \;\&\; wBu \;\&\; zBv)$

Snadno lze ověřit, že bisimulace je relace ekvivalence. Nyní dokážeme, že ve světech, které jsou v relaci bisimulace platí tytéž formule.

Věta 2.2.7. *Nechť* $\mathbb{M}_1$ *a* $\mathbb{M}_2$ *jsou dva modely a* B *relace bisimulace na jejich množinách možných světů* W_1 *a* W_2*. Pak pro každé dva světy* $x \in W1$ *a* $y \in W2$*, které jsou v relaci* B*, a pro každou formuli* φ *platí* $x \Vdash \varphi \iff y \Vdash \varphi$.

Důkaz. Budeme postupovat indukcí podle složitosti formule φ.

(i) Když je φ atom, pak stačí použít atomickou harmonii.

(ii) Je-li tvaru $\psi \wedge \chi$, pak pokud platí v x, tak v x platí ψ a χ. Na obě formule použijeme indukční předpoklad. Stejně tak je to i u opačné implikace.

(iii) Pro diskujunkci se dokáže podobně.

(*iv*) Jestliže má formule tvar $\psi \to \chi$ a platí ve světě x, pak uvažujme libovolné dva světy u, v takové, že $Ryuv$ a $u \Vdash \psi$. Chceme dokázat, že platí $v \Vdash \chi$. Díky bisimulaci víme, že existují světy w, z takové, že $Rxwz$ a uBw, vBz. Z indukčního předpokladu můžeme usoudit, že $w \Vdash \psi$. Protože v x platí implikace, tak platí také $z \Vdash \chi$. Ze vztahu zBv pak plyne $v \Vdash \chi$, což jsme chtěli dokázat. Platí-li formule ve světě y, postupujeme analogicky.

(*v*) Je-li konečně φ silná konjunkce $\psi \& \chi$ a platí ve světě x, pak existují světy w a z, o kterých platí $Rwzx$ a $w \Vdash \psi$, $z \Vdash \chi$. Díky bisimilárnosti x a y pak existují také světy u a v, o nichž platí $Ruvy$ a uBw a vBz. Indukčního předpokladu pak lze usoudit, že platí $u \Vdash \psi$ a $v \Vdash \chi$. Ve světě y tedy platí jejich silná konjunkce.

□

2.2.3 Příklady bisimulace

První příklad bude zcela analogický tomu, co již známe z modální logiky. Půjde o disjunktní sjednocení modelů a ve formulaci lemmatu bude změněno jen pár slov vzhledem ke změnám v sémantice.

Lemma 2.2.8. *Mějme modely $\mathbb{M}_i = (W_i, \leq_i, R_i, V_i)$ opatřené idexy i z nějaké indexovací množiny I. Dále uvažme model $\mathbb{M} = (W, \leq, R, V)$, který vznikne jako jejich disjunktní sjednocení, tedy $W = \bigcup_{i \in I} W_i$, $\leq = \bigcup_{i \in I} \leq_i$, $R = \bigcup_{i \in I} R_i$ a $V(p) = \bigcup_{i \in I} V_i(p)$ pro každý atom p. Přitom pokud nejsou některé modely disjunktní, vezmeme jejich isomorfní kopie, které disjunktní jsou. Pak každý model $\mathbb{M}_i$ je s modelem $\mathbb{M}$ bisimilární.*

Následující dva příklady nás dostanou na úroveň rámců a zavedeme ještě pojem vázaného morfismu. Prozatím je ale uveďme na úrovni modelů a bisimulace. První z nich se týká reflexivity.

Lemma 2.2.9. *Nechť jsou $\mathbb{M}_1 = (W_1, \leq_1, R_1, V_1)$ a $\mathbb{M}_2 = (W_2, \leq_2, R_2, V_2)$ dva modely definované následujícím způsobem:*

(*i*) *Světy v modelu $\mathbb{M}_1$ jsou jako přirozená čísla, ale uspořádaná naopak, tedy $W_1 = \{w_1, w_2, w_3, \dots\}$ a $\dots, < w_3, w_2 >, < w_2, w_1 > \in \leq_1$(k tomu samozřejmě také musíme přidat reflexivní a transitivní vztahy). Nechť navíc relace R je taková, že pro žádný svět w kromě světa w_1 neplatí R_1www, ale pro každé dva světy w_i a w_{i+1} platí $R_1 w_{i+1} w_{i+1} w_i$(k tomu bude potřeba přidat i další vztahy, které si vynutí definice relace dosažitelnosti).*

(*ii*) *Model $\mathbb{M}_2$ má jediný svět w, pro nějž platí $w \leq w$ a $Rwww$.*

Nechť dále ve všech světech prvního modelu jsou splněny přesně tytéž atomické formule, které jsou splněny ve druhém modelu. Potom tyto dva modely jsou bisimilární.

Důkaz. Stačí vzít totální relaci mezi oběma modely, tedy relaci B takovou, že pro každý svět w_i z modelu $\mathbb{M}_1$ platí $w_i B w$, kde w je jediný svět modelu $\mathbb{M}_2$. □

Další příklad se bude týkat podmínky $(viii)$, kterou v definici 2.1.3 klademe na relaci dosažitelnosti. Jedním ze způsobů, jak tuto podmínku splnit, je mít v rámci(modelu) $\mathbb{F} = (W, \leq, R)$ svět u, který tuto podmínku zaručuje pro všechny ostatní světy:

$$\forall v \in W \forall w \in W (v \leq w \ \Rightarrow \ Ruvw).$$

Ukážeme si, že model tohoto typu můžeme být bisimilární modelu, který takovýto svět u nemá.

Lemma 2.2.10. *Nechť jsou $\mathbb{M}_1 = (W_1, \leq_1, R_1, V_1)$ a $\mathbb{M}_2 = (W_2, \leq_2, R_2, V_2)$ dva modální modely definované následujícím způsobem:*

(i) *První model má čtyři možné světy: $W_1 = \{x, y, u_1, u_2\}$. Přitom platí R_1u_1xx a $R_1u_1u_1u_1$, R_1u_2yy a $R_1u_2u_2u_2$. K tomu budou muset platit ještě další vztahy týkající se relace dosažitelnosti i uspořádání, které pro ale nyní nehrají klíčovou roli.*

(ii) *Druhý model má tři možné světy: $W_2 = \{v, w, u\}$. Přitom platí R_2uuu , R_2uvv a R_2uww. K tomu platí také některé další vztahy, které si vynucuje definice uspořádání a relace dosažitelnosti.*

Nechť dále ve všech světech obou modelů platí tytéž atomické formule. Pak jsou tyto dva modely bisimilární

Důkaz. Vezměme relaci $B \subseteq W_1 \times W_2$, kde u_1Bu, u_2Bu, xBv a yBw. Tato relace je bisimulace. $\square$

Oba předchozí příklady lze použít také jako příklady na vázaný morfismus, který definujeme obdobně jako v předchozí kapitole.

Definice 2.2.11. *Nechť jsou $\mathbb{M}_1 = (W_1, \leq_1, R_1, V_1)$ a $\mathbb{M}_2 = (W_2, \leq_2, R_2, V_2)$ dva modely. Nechť dále $f : W_1 \to W_2$ je funkce mezi jejich množinami možných světů. Pak tuto funkci nazveme vázaným morfismem mezi těmito modely, jestliže platí:*

(i) *Funkce f zobrazuje množinu W_1 na množinu W_2.*

(ii) *Funkce f je bisimulace.*

Pokud z podmínek pro bisimulaci odebereme atomickou harmonii, získáme z vázaného morfismu mezi modely vázaný morfismus mezi rámci. Pak můžeme dále definovat splněnost formule na rámci stejně jako v definici 1.4.1.

Definice 2.2.12. *Buď $\mathbb{F} = (W, \leq, R)$ rámec a φ libovolná formule. Pak prohlásíme, že φ je splněna v rámci $\mathbb{F}$ a píšeme*

$$\mathbb{F} \Vdash \varphi,$$

jestliže pro každý model $\mathbb{M}$, který vznikl z tohoto rámce, takže má jeho množinu možných světů, uspořádání na světech a relaci dosažitelnosti, platí $\mathbb{M} \Vdash \varphi$.

Pro takto definovaný vázaný morfismus a splněnost formule můžeme vyslovit podobnou větu jako v modální logici.

Věta 2.2.13. *Buď f vázaný morfismus mezi dvěma rámci $\mathbb{F}_1$ a $\mathbb{F}_2$. Pak pro libovolnou formuli φ platí*

$$\mathbb{F}_1 \Vdash \varphi \implies \mathbb{F}_2, \Vdash \varphi.$$

Když nakonec budeme uvažovat definovatelnost tříd rámců podobně jako v definici 1.4.2, vidíme, že lemma 2.2.9 nám ukazuje, že nelze definovat třídu z hlediska relace dosažitelnosti nereflexivních rámců(totiž rámců, v nichž existuje svět w, o němž neplatí Rwww). Bisimulace, která se používá v důkazu je totiž zjevně vázaný morfismus mezi nereflexivním a reflexivním rámcem. Podobně nám lemma 2.2.10 ukazuje, že nelze definovat třídu rámců, které nemají svět u takový, že pro každé dva světy $v \leq w$ platí $Ruvw$.

Literatura

[1] Blackburn P., van Benthem J., Wolter F.(2007): Handbook of Modal Logic, Elsevier.

[2] Blaskburn P., de Rijke M., Venema Y.(2001): Modal Logic, Cambridge university press.

[3] van Benthem a kolektiv(2001): Handbook of Philosofical logic, 2nd edition, volume 3; Kluwer Academic Publishers.

[4] Restall G.(2000): An Introduction to Substructural Logics, Routledge.

[5] Ono H., Komori Y.(1985): Logics Without the Contraction Rule, J. Symb. Log. 50(1): 169-201